

Devoir maison n° 11

À rendre le vendredi 14 mars

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'appropriier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1 (*inspiré d'un oral de CCINP 2022*).

Soit M la courbe paramétrée par
$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t, \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t. \end{cases}$$

Q1. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$. On précisera le théorème utilisé. Montrer de plus que $\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Q2. Soit g la fonction définie par $g(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) + \cos(t)$. Déterminer les variations de g sur $[0; \pi]$.

Q3. Justifier que

$$\forall t \in [0; \frac{\pi}{3}[, g(t) > 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in]\frac{\pi}{3}; \pi[, g(t) < 0.$$

Q4. Expliquer pourquoi on peut réduire l'étude de M à l'intervalle $[0; \pi]$.

Q5. Dresser le tableau de variations commun de x et y sur $[0; \pi]$.

Q6. Calculer $M'(\pi)$. Quel est le nom du point $M(\pi)$?

Q7. Calculer $M''(\pi)$ et $M^{(3)}(\pi)$ puis en déduire la nature de ce point.

Q8. Tracer M en précisant les tangentes pour $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ et π .